

Implementación de un Algoritmo para el Cálculo del Eje Medio de Polígonos Generalizados

José María Bañón, Diego García y John Wilmar Castro

Escuela de Ingeniería de Sistemas y Computación.

Universidad del Valle, Cali, Colombia.

E-mail : banon@borabora.univalle.edu.co

Abstract

Although, efficient and reliable algorithms have been developed for computing the medial axis of polygons limited by straight line segments and circular arcs, very little empirical work has been reported about the implementation of such algorithms. This paper is devoted to cover the lack of implementations and experimentations of general algorithms for computing the medial axis of generalized polygons. The concept of medial axis and its basic properties which are relevant in this paper are presented. The algorithm presented here is based on a tracing approach. First, there is a preprocessing step in order to identify terminal points. Starting with a convex vertex of the polygon, the algorithm calculates the medial edge emanating from that vertex. Once the other endpoint of the medial edge is found, the algorithm recursively computes all the adjacent medial vertex and the geometric graph is constructed. The algorithm has been implemented and successfully applied to complex generalized polygons. The paper highlights its performance on a number of examples showing medial axis with straight line segments, parabolic arcs, elliptic arcs and hyperbolic arcs.

Keywords: Computer graphics, algorithms, medial axis, generalized polygon, bisector.

Resumen

A pesar de que algoritmos eficientes y confiables han sido desarrollados para calcular el eje medio de polígonos limitados por segmentos de líneas rectas y arcos de circunferencia, muy poco trabajo experimental ha sido reportado sobre la implementación de dichos algoritmos. Este artículo está dedicado a cubrir la falta de implementaciones y experimentaciones con algoritmos generales de cálculo del eje medio de polígonos generalizados. El concepto de eje medio y sus principales propiedades básicas que son relevantes en este artículo son descritas. El algoritmo presentado está basado en la técnica del trazado. Inicialmente hay un preprocesamiento en el que los puntos terminales son identificados. Comenzando con un vértice convexo del polígono, el algoritmo calcula la arista media que emana del vértice. Una vez que el otro extremo de la arista media es encontrado, el algoritmo recursivamente calcula todos los vértices medios adyacentes y el grafo geométrico es construido. El algoritmo ha sido implementado y aplicado exitosamente a polígonos generalizados complejos. El artículo enfatiza su desempeño en varios ejemplos que muestran ejes medios con segmentos de líneas rectas, arcos de parábolas, arcos de elipses y arcos de hipérbolas.

Palabras Clave: Computación gráfica, algoritmos, eje medio, polígono generalizado, bisector.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo trata del desarrollo y de la implementación de un algoritmo de cálculo del eje medio de polígonos, cuyos lados son segmentos de líneas rectas y arcos circulares, que denominaremos en adelante polígonos generalizados. La motivación del artículo es doble. Por una parte, la falta de referencias que presenten resultados experimentales y suficientemente generales sobre ejes medios de polígonos generalizados. Por otra parte, la aplicación futura de la implementación para resolver el problema de la generación de trayectorias de un planificador exacto del movimiento de dos robots circulares en el plano [1]. El planificador está basado en una descomposición exacta en celdas en la cual intervienen polígonos generalizados.

En varias referencias [3, 6, 9, 8] se ha señalado la gran superioridad del número de publicaciones sobre el análisis del eje medio frente al número de publicaciones que presentan implementaciones. Algoritmos eficientes para el cálculo del diagrama de Voronoi de un conjunto de n arcos de círculos y segmentos de líneas rectas en el plano han sido reportados por Lee et al. [7] en $O(n \log^2 n)$ y Yap [11] en $O(n \log n)$. Desde el punto de vista empírico, en [4, 5] Gursoy y Patrikalakis desarrollan e implementan un algoritmo del cálculo del eje medio de polígonos generalizados. Los resultados experimentales que presentan estos autores consisten únicamente en ejes medios con ramas bisectoras rectas y parabólicas. No se presenta ningún eje medio calculado que tenga ramas elípticas ó hiperbólicas.

La técnica utilizada por Gursoy y Patrikalakis fue generalizada por Sherbrooke et al. [10] quienes proponen e implementan un algoritmo general, para el cálculo de la superficie media de poliedros sin cavidades en el interior. Así mismo, Sherbrooke et al. [10] presentan un estudio sobre las propiedades topológicas del eje medio y la superficie media de objetos muy generales. En el presente trabajo se reporta el desarrollo y la implementación de un algoritmo de cálculo del eje medio de polígonos generalizados sin frontera interior. El algoritmo se basa en las propiedades de conexidad del eje medio junto con un esquema clasificatorio de los distintos elementos del eje medio [10]. Los puntos de ramificación del eje medio son calculados mediante intersección de las ramas bisectoras de las aristas del polígono. El eje medio se genera mediante un cálculo recursivo de los vértices y aristas del eje medio adyacentes a un determinado vértice.

2. GENERALIDADES SOBRE EL EJE MEDIO

En esta sección establecemos las definiciones básicas y propiedades relativas al eje medio. Un estudio reciente y general sobre la teoría matemática del eje medio en dominios muy generales del plano se encuentra en [2].

Definición del Dominio: Un polígono generalizado es un conjunto del plano $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ que es cierre de un subconjunto abierto y acotado por un número finito de curvas simples y cerradas disjuntas dos a dos: una frontera exterior y varias fronteras interiores. Cada frontera está compuesta por un número finito de arcos circulares y segmentos de líneas rectas que denominaremos aristas del polígono generalizado. El punto en que se encuentran dos aristas adyacentes puede presentar derivada discontinua, en cuyo caso diremos que forman una esquina. Si el ángulo interior que forman las tangentes en una esquina es menor (resp. mayor) que π se dice que es una esquina convexa (resp. cóncava). Sea Ω un polígono generalizado cualquiera y denotemos por $B_r(\mathbf{p})$ el disco cerrado de radio r centrado en el punto \mathbf{p} . Se permite que el radio del disco sea 0, en cuyo caso el disco se reduce a un punto.

Definición 1 *Un disco $B_r(\mathbf{p})$ es disco maximal del dominio Ω si no es subconjunto propio de ningún otro disco contenido en Ω .*

Definición 2 *El núcleo $\mathcal{N}(\Omega)$ del dominio Ω es el conjunto de discos maximales contenidos en Ω .*

Definición 3 *El eje medio $\mathbf{MA}(\Omega)$ de un dominio Ω es el conjunto de los centros de los discos de $\mathcal{N}(\Omega)$.*

El eje medio de Ω está formado por puntos que equidistan de su frontera $\partial\Omega$.

Definición 4 La transformada del eje medio $\text{MAT}(\Omega)$ de un dominio Ω es el conjunto de los centros y de los radios de los discos de $\mathcal{N}(\Omega)$.

Definición 5 Sea $B_r(\mathbf{p})$ un disco maximal de Ω . Se define el conjunto de contacto $\mathcal{C}(\mathbf{p})$ del punto \mathbf{p} como el conjunto de los puntos de la frontera del disco $B_r(\mathbf{p})$ comunes con la frontera de Ω .

El conjunto de contacto está formado por un número finito de componentes conexas denominadas componentes de contacto [2]. Las componentes de contacto pueden estar compuestas por puntos de contacto aislados ó por arcos de contacto. A la arista ó esquina cóncava del polígono que contiene una componente de contacto de un punto del eje medio se le denomina gobernador del punto.

Clasificación de los Puntos del Eje Medio: Los puntos del eje medio se caracterizan por el número de componentes de contacto, que denominamos orden del punto [2].

1. *Puntos Terminales:* Son puntos con una sola componente de contacto. Estos puntos son centros de círculos osculadores inscritos en el dominio ó esquinas convexas del dominio. Las esquinas convexas pertenecen al eje medio como caso límite en el que las esferas maximales son de radio cero.
2. *Puntos No Regulares:* Son puntos con dos componentes de contacto tales que el círculo maximal es círculo osculador.
3. *Puntos Regulares:* Son puntos con dos componentes de contacto. Forman parte de segmentos de curvas analíticas que constituyen las aristas del eje medio.
4. *Puntos de Bifurcación:* Son puntos con tres ó más componentes de contacto.

Se demuestra que el número de puntos terminales, no regulares y de bifurcación es finito [2]. En la figura 1 se muestran los diferentes tipos de puntos del eje medio de un polígono generalizado.

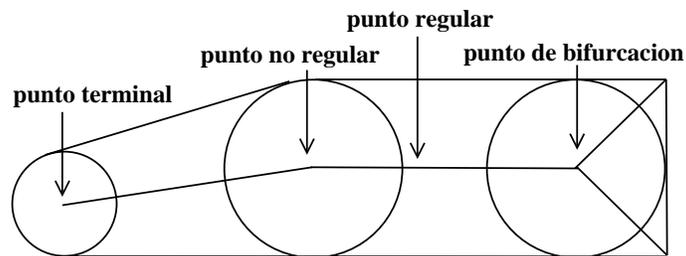


Figura 1: Tipos de puntos del eje medio

Estructura de Grafo: El eje medio $\text{MA}(\Omega)$ tiene estructura de grafo geométrico. Los vértices del grafo son los puntos terminales, los puntos no regulares y los puntos de bifurcación. De cada vértice del grafo de orden n emanan n aristas. Las aristas del grafo están formadas un número finito de curvas analíticas constituidas por puntos regulares.

Tipos de Aristas del Eje Medio: Las aristas del eje medio están compuestas por puntos que equidistan de dos puntos de la frontera del polígono generalizado. Por tanto, para calcular las aristas del eje medio se deben de tener en cuenta los bisectores de cada par de elementos activos de la frontera del polígono generalizado. Los elementos activos son las aristas del polígono y las esquinas cóncavas. Las aristas del eje medio son pues generadas por los bisectores de los siguientes pares de elementos activos: dos puntos, un punto y un segmento recto, un punto y un arco circular, dos segmentos rectos, un segmento recto y un arco circular y dos arcos circulares.

Regiones de Influencia: A cada uno de los elementos activos se le asocia una región de influencia. Si el elemento activo es un arco \mathcal{A} con extremos u y v , su región de influencia es el cono acotado por los rayos R_u y R_v que salen del centro de \mathcal{A} y pasan por u y v respectivamente. La región de influencia de un segmento \mathcal{S} de línea recta es la región acotada por el segmento y los rayos que salen perpendicularmente de los extremos y en la dirección interior al polígono. La región de influencia de una esquina cóncava es un cono limitado por dos rayos que salen de la esquina y son rayos limitantes de las regiones de influencia de las aristas que forman la esquina.

3. GENERACION DE LOS BISECTORES

En esta sección describimos la generación de las curvas bisectoras involucradas en el cálculo del eje medio de polígonos generalizados. En un apéndice final se establecen las ecuaciones de los bisectores. Los bisectores generados por puntos son considerados como casos particulares de bisectores generados por círculos de radio cero.

3.1. Bisector de dos Segmentos de Líneas Rectas:

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos segmentos, \mathcal{S} y \mathcal{S}' , de líneas rectas es un segmento de línea recta que se encuentra en la recta que divide el ángulo que forman \mathcal{S} y \mathcal{S}' en dos ángulos iguales y que se encuentra en las regiones de influencia de los segmentos \mathcal{S} y \mathcal{S}' .

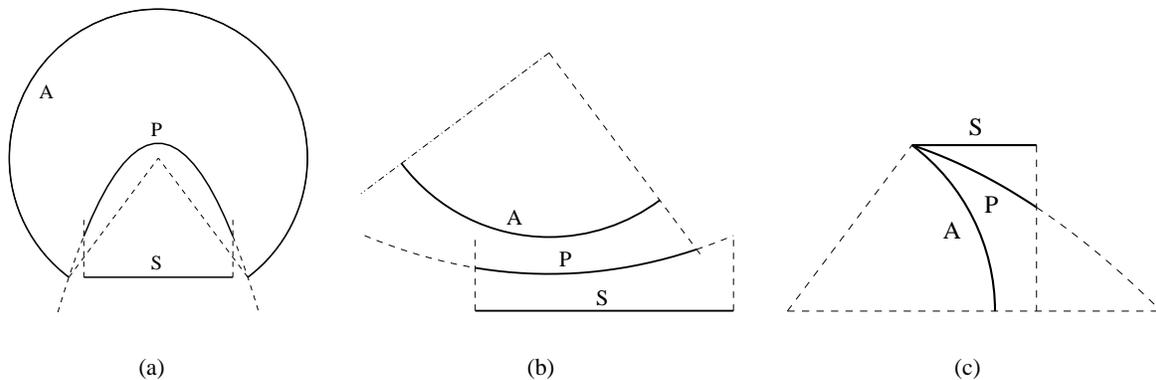


Figura 2: Casos de Ramas Parabólicas Bisectoras.

3.2. Bisector de un Segmento de Línea Recta y un Arco Circular:

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de un segmento de línea recta \mathcal{S} y un arco circular \mathcal{A} es un arco \mathcal{P} de parábola. Para calcular \mathcal{P} se procede a determinar la parábola bisectora de la línea recta y el círculo

que soportan respectivamente los segmentos \mathcal{S} y \mathcal{A} . La parte de la parábola común a las regiones de influencia de \mathcal{S} y \mathcal{A} definen los límites del arco \mathcal{P} de parábola.

Con el objeto de simplificar en lo posible los cálculos hemos referido la ecuación de la parábola al sistema coordenado tal que el eje- x coincida con la línea recta que soporta al segmento \mathcal{S} y el eje- y sea la línea recta que pasa por el centro del círculo del arco \mathcal{A} y ortogonal al eje- x . El vector normal al segmento \mathcal{S} interno al polígono apunta en la dirección del eje- y positivo. En este sistema de referencia, la ecuación de la parábola bisectora es (ver apéndice): $y = \frac{x^2 + B^2 - R^2}{2(\epsilon R + B)}$ donde B es la distancia entre el centro del círculo del arco \mathcal{A} y el eje- x , R es el radio del arco y $\epsilon = \pm 1$ define si el bisector se toma por fuera ó por dentro del círculo del arco \mathcal{A} (ver apéndice). Las figuras 2 a), 2 b) y 2 c) muestran el arco \mathcal{P} de parábola limitado por la región común a las regiones de influencia del segmento \mathcal{S} y del arco \mathcal{A} en los diferentes casos que se pueden presentar. La figura 2 a) ilustra el caso en que $\epsilon = -1$ y $B < R$. En la figura 2 b) $\epsilon = +1$ y $B \geq R$. Finalmente en la figura 2 c) $\epsilon = +1$ y $B < R$.

3.3. Bisector de dos Arcos Circulares:

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos arcos circulares, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , es un arco \mathcal{H} de hipérbola ó un arco \mathcal{E} de elipse. El cálculo de \mathcal{H} ó \mathcal{E} se realiza determinando la hipérbola ó elipse bisectora de los dos círculos que soportan los arcos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y tomando la parte común a sus respectivas regiones de influencia. Supongamos que la distancia entre los centros de ambos círculos es $2d$. Entonces, en el sistema de referencia en el que los centros de los dos círculos son los puntos $(-d, 0)$ y $(d, 0)$, las ecuaciones de la hipérbola y de la elipse bisectora son respectivamente (ver apéndice),

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

donde $a = \frac{R - \eta r}{2}$, $b = \sqrt{4d^2 - (R - \eta r)^2}/2$, $c = \sqrt{(R - \eta r)^2 - 4d^2}/2$ y $\eta = \epsilon/\delta$, donde ϵ y δ son signos ± 1 que indican si el bisector está dentro ó fuera de los círculos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Las ramas elípticas aparecen cuando ninguno de los círculos de los dos arcos es exterior al otro mientras que las ramas hiperbólicas aparecen cuando ninguno de los círculos contiene al otro. Las figuras 3 a) y 3 b) muestran el arco \mathcal{E} de elipse limitado por la región común a las regiones de influencia de los arcos circulares \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 en los diferentes casos que se pueden presentar. En la figura 3 a) se ilustra el caso en que los dos círculos se cortan y la rama elíptica \mathcal{E} es exterior al círculo de \mathcal{A}_1 e interior al círculo de \mathcal{A}_2 . En la figura 3 b) se tiene el caso en el que el círculo de \mathcal{A}_1 contiene al círculo de \mathcal{A}_2 . Las figuras 4 a), 4 b) y 4 c) muestran el arco \mathcal{H} de hipérbola limitado por la región común a las regiones de influencia de los arcos circulares \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 en los diferentes casos que se pueden presentar. La figura 4 a) muestra el caso de un arco \mathcal{H} de hipérbola bisectora de dos arcos de círculos exteriores. Cuando los círculos se cortan se tienen dos casos: el arco de hipérbola puede ser exterior a los dos círculos, véase la figura 4 b), ó puede ser interior a los dos círculos como se muestra en la figura 4 c).

En ciertas configuraciones particulares, las ramas bisectoras pueden ser cónicas degeneradas. En estos casos, la determinación de las ramas bisectoras resulta sencilla [11].

4. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

El algoritmo utilizado en el cálculo del eje medio de polígonos generalizados se fundamenta en la conexidad del eje medio [10, 2]. Se trata esencialmente de construir el grafo vértice-arista del eje medio mediante una búsqueda recursiva de los vértices y aristas incidentes a un determinado vértice.

4.1. El Algoritmo

Inicialmente, en un preprocesamiento, se determinan los vértices del eje medio que son puntos terminales ó puntos no regulares. Seguidamente, se procede al cálculo de los vértices que son puntos de ramificación. El

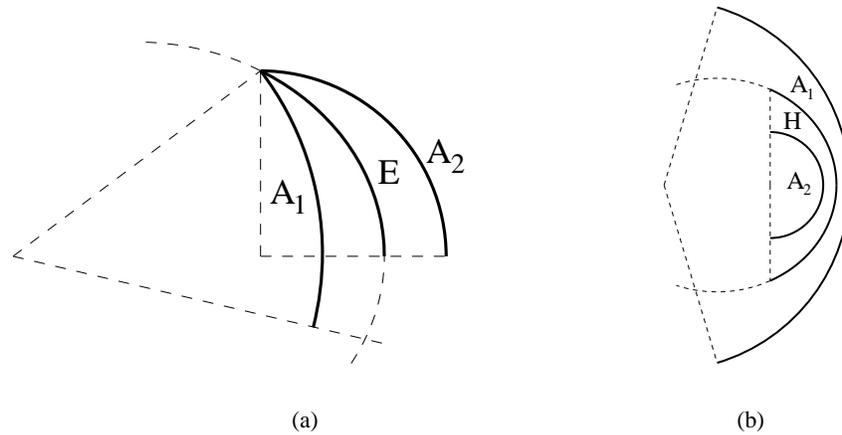


Figura 3: Casos de Ramas Elípticas Bisectoras.

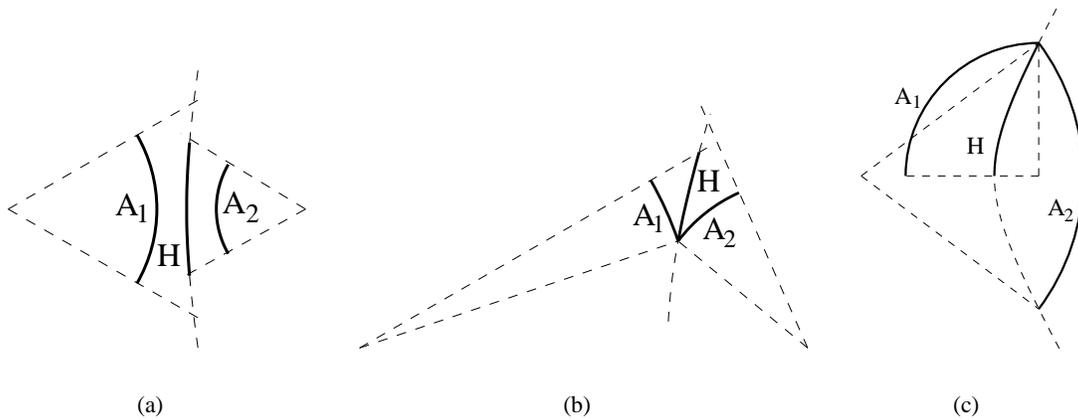


Figura 4: Casos de Ramas Hiperbólicas Bisectoras.

procedimiento consiste en la búsqueda y determinación de todos los elementos del eje medio adyacentes a un vértice v cualquiera, es decir: i) determinación de todas las ramas bisectoras que emergen del vértice v y ii) determinación de los vértices que son extremos de las ramas bisectoras que emergen del vértice v . Los vértices se guardan en una lista de prioridad \mathcal{L} . El procedimiento se aplica a todos los vértices de la lista \mathcal{L} hasta que el eje medio ha sido completamente recorrido.

4.2. Preprocesamiento

En un primer preprocesamiento de los lados del polígono se determinan los puntos terminales y los puntos no regulares. Los puntos candidatos a ser puntos terminales ó puntos no regulares son los centros de los arcos circulares convexos que son aristas del polígono. Sea \mathbf{p} un punto candidato centro de un arco circular \mathcal{A} que es arista del polígono. Si el círculo $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ que soporta \mathcal{A} está contenido en el polígono entonces \mathbf{p} es un vértice del eje medio. El tipo de vértice lo determina el número de gobernadores del punto. Si tiene un gobernador es un punto terminal, si tiene dos gobernadores es un punto no regular, y si tiene más de dos gobernadores se trata de puntos de ramificación.

4.3. Búsqueda de Puntos de Bifurcación

A continuación se describe el procedimiento para obtener el resto de los vértices del eje medio. El procedimiento se basa en la búsqueda recursiva de los vértices adyacentes a un determinado vértice v . Cualquier esquina convexa del polígono puede ser utilizada como primer vértice del eje medio para comenzar la búsqueda recursiva.

Una vez se tiene un vértice v del eje medio, es preciso encontrar sus vértices adyacentes. Sea $\mathcal{G} = \{e_i\}_{i=1}^{N_g}$ el conjunto de aristas del polígono que son gobernadoras del vértice v . Cada par $\{e_i, e_j\}$ de gobernadores de v genera una posible rama bisectora. Sea \mathcal{S} el conjunto de todos los pares $\mathcal{S} = \{e_i, e_j\}_{i,j}$ del conjunto de gobernadores \mathcal{G} de v . Para cada par $\{e_i, e_j\}$ de \mathcal{S} se toman las ternas de aristas $\{e_i, e_j, e_k\}_k$ donde e_k no es una arista gobernadora del vértice v . Cada terna $\{e_i, e_j, e_k\}$ define dos ramas bisectoras, $\{b_1(t), b_2(t)\}$ donde por ejemplo $b_1(t)$ es la rama bisectora de las aristas $\{e_i, e_j\}$ y $b_2(t)$ es la rama bisectora de las aristas $\{e_i, e_k\}$. Se calculan los puntos de intersección entre las ramas $b_1(t)$ y $b_2(t)$. Hay que verificar que los puntos de intersección generados, vértices candidatos, cumplan con las condiciones de vértice válido. Si el vértice candidato cumple con las condiciones entonces se añade v a la lista de vértices del eje medio. El algoritmo termina cuando todos los vértices medios han sido encontrados.

Condiciones de Vértice Válido Para que un vértice candidato v_c generado por la terna de aristas $\{e_i, e_j, e_k\}$ sea un vértice válido, debe cumplir con las dos condiciones siguientes: i) v_c debe estar ubicado en el interior del polígono. ii) La distancia h de v_c a las aristas gobernadoras $\{e_i, e_j, e_k\}$ debe ser menor ó igual que la distancia de v_c a cualquier otra arista. Si existe una arista diferente a las gobernadoras, cuya distancia a v_c es menor que h , entonces el vértice candidato v_c es rechazado. Si v_c cumple con las condiciones anteriores es adicionado a la lista de vértices válidos con gobernadores las aristas $\{e_i, e_j, e_k\}$. Si existe una arista e_g diferente a las gobernadoras, cuya distancia a v_c es igual a h , entonces se añade e_g a la lista de aristas gobernadoras.

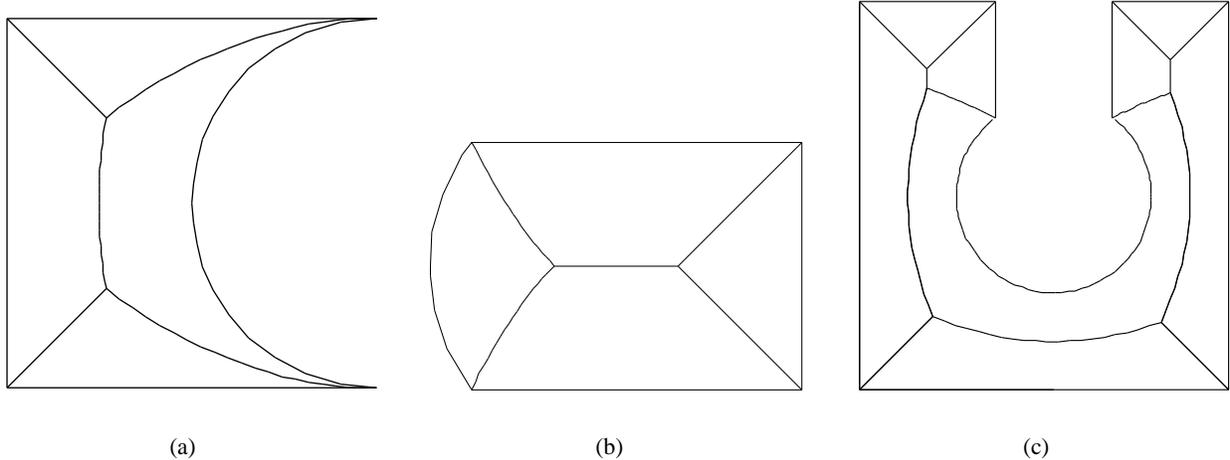


Figura 5: Eje medio de polígonos con un arco circular.

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Hemos implementado el algoritmo descrito en este trabajo en lenguaje C y con las librerías gráficas OpenGL en una plataforma PC-Linux. Hemos aplicado el algoritmo a varios polígonos generalizados con distintos grados de complejidad. En las figuras 5 se muestran ejes medios de polígonos generalizados con una sola arista circular. Los ejes medios consisten en segmentos de líneas rectas y arcos de parábolas. Las figuras 6 muestran ejemplos de ejes medios de polígonos con dos aristas circulares. En la figura 6 a) el eje medio consiste en un segmento

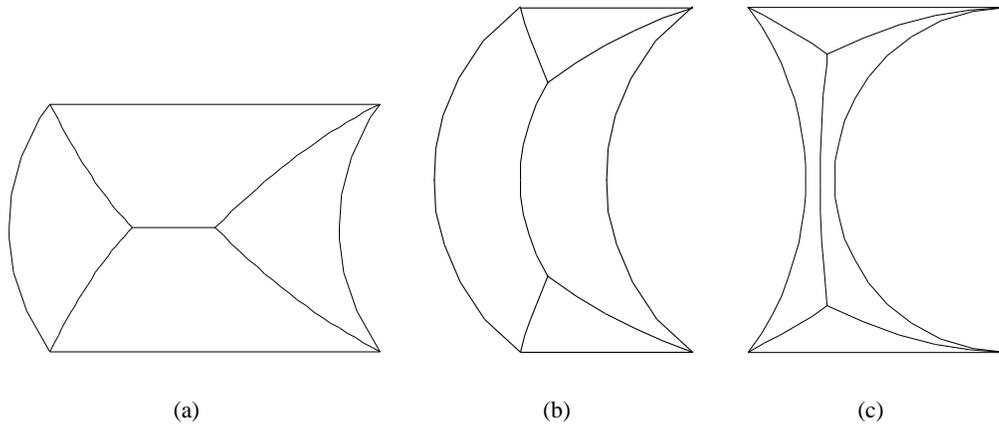


Figura 6: Eje medio de polígonos con dos arcos circulares.

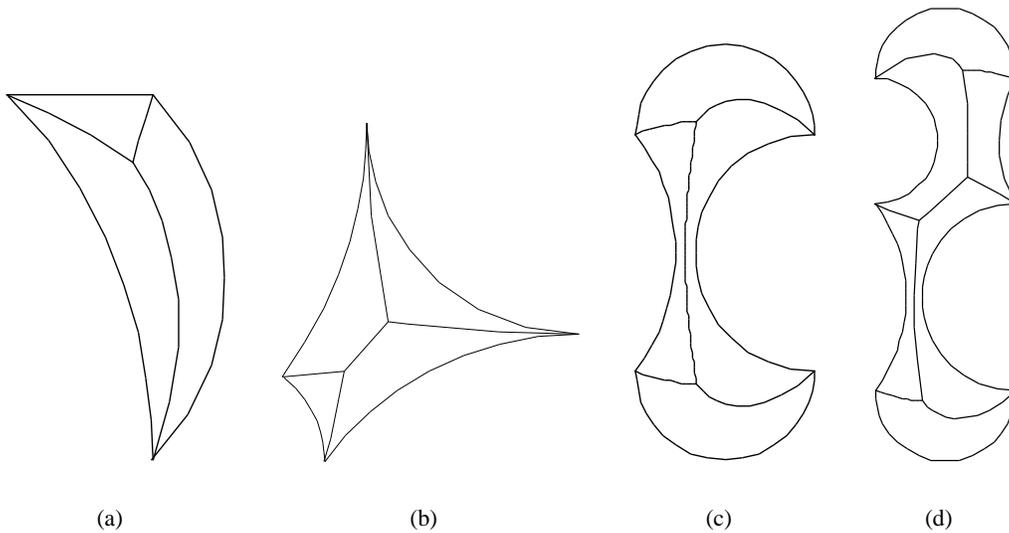


Figura 7: Eje medio de polígonos con varios arcos circulares.

recto y cuatro arcos de parábolas. En la figura 6 b) el eje medio se compone de cuatro ramas parabólicas y una rama elíptica generada por las dos aristas circulares. En la figura 6 c) el eje medio consiste en cuatro ramas parabólicas y una rama hiperbólica generada por las dos aristas circulares. Finalmente, las figuras 7 muestran ejemplos de ejes medios de polígonos con varias aristas circulares.

En este artículo, hemos presentado un algoritmo general para el cálculo del eje medio de polígonos generalizados. El algoritmo se basa en la conexidad del eje medio. Inicialmente en un preprocesamiento previo se calculan los puntos terminales y no regulares. De manera recursiva se calculan los puntos de ramificación adyacentes a un vértice cualquiera del eje medio y al mismo tiempo se trazan las ramas bisectoras. Los puntos de ramificación se calculan como intersecciones de dos ramas bisectoras de aristas del polígono. El desarrollo y la implementación del algoritmo son las contribuciones más importantes del artículo. Los resultados obtenidos ilustran ejes medios con todos los tipos de ramas bisectoras que se pueden presentar: segmentos, arcos de parábolas, arcos de elipses y arcos de hipérbolas.

APENDICE

En este apéndice se establecen las ecuaciones de las ramas bisectoras parabólicas, elípticas e hiperbólicas. El bisector de dos curvas Q_1 y Q_2 es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de Q_1 y Q_2 . Para calcular el bisector se establecen las ecuaciones que satisfacen los puntos comunes a Q'_1 y Q'_2 que son las curvas paralelas a Q_1 y Q_2 respectivamente, tales que la distancia entre Q_1 y Q'_1 sea la misma que la distancia entre Q_2 y Q'_2 .

Bisector de una Línea y un Círculo: Sin pérdida de generalidad, calculemos el bisector entre la línea $y = 0$ y el círculo de radio R y centro el punto $(0, B)$. Los puntos equidistantes de la línea y el círculo se determinan tomando las líneas $y = h$ paralelas a la línea $y = 0$ y los círculos paralelos $x^2 + (y - B)^2 = (R + \epsilon h)^2$ al círculo y calculando los puntos comunes. El signo $\epsilon = \pm$ indica si buscamos el bisector por dentro ó por fuera del círculo. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la parábola:

$$y = \frac{x^2 + B^2 - R^2}{2(\epsilon R + B)}. \quad (1)$$

Bisector de dos Círculos: Igualmente, sin pérdida de generalidad, tomaremos un sistema de referencia coordinado en el que las coordenadas de los centros de los círculos C_1 , de radio R , y C_2 , de radio r , son respectivamente $(-d, 0)$ y $(d, 0)$, donde $2d$ es la distancia entre los centros de los círculos y $r \leq R$. El bisector de los dos círculos se determina trazando los círculos paralelos $(x + d)^2 + y^2 = (R + \epsilon h)^2$ y $(x - d)^2 + y^2 = (r + \delta h)^2$ y calculando los puntos comunes. Los signos $\epsilon = \pm$ y $\delta = \pm$ indican si el bisector se busca por dentro ó por fuera de los círculos. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene la cónica:

$$4(\omega - 4d^2)x^2 + 4\omega y^2 + \omega(4d^2 - \omega) = 0,$$

donde $\omega = (R - \eta r)^2$ y $\eta = \frac{\epsilon}{\delta}$. Aquí hay que distinguir tres casos: si $\omega(\omega - 4d^2) < 0$ el bisector es una **hipérbola**; si $\omega(\omega - 4d^2) > 0$ el bisector es una **elipse** y si $\omega(\omega - 4d^2) = 0$ se trata de una cónica degenerada.

Referencias

- [1] Bañón J. M., Arcila O., Arango J., Coordinación Exacta del Movimiento de dos Robots Circulares. VIII Encuentros Nacionales de Geometría Computacional, Castellón, España, pp. 373-382, Julio 1999.
- [2] Choi HI, Choi SW, Moon HP. *Mathematical theory of medial axis transform*. Pacific Journal of Mathematics 1997;181(1):5788.
- [3] Gold C. M., Remmele P. M., Voronoi diagrams of line segments made easy. In Proc. 7th Cannad. Conf. Comput. Geom., pages 223-228, Québec City, Québec, Canada, Aug 1995.
- [4] Gursoy H. N. and Patrikalakis N.M. An automated coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform. Part I: Algorithms., Engineering with Computers, 8, 121-137, 1992.
- [5] Gursoy H. N. and Patrikalakis N.M. An automated coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform. Part II: Implementation., Engineering with Computers, 8, 179-186, 1992.
- [6] Imai T., A topology oriented algorithm for the Voronoi diagram of polygons. In Proc. 8th Cannad. Conf. Comput. Geom., pages 107-112, Ottawa, Canada. Carleton University Press, 1996.
- [7] Lee D.T., Drysdale R.L., Generalization of Voronoi diagrams in the plane. SIAM Journal of Computing, 10:73-87, 1981.

- [8] Okabe A., Boots B., Sugihara K., Chiu S. N. Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley-Sons, second edition, 2000.
- [9] Seel M., An accurate arithmetic implementation of line segments AVDs. Technical report, MPI-Saarbrücken, D-66123 Saarbrücken, Germany, Sep 1996.
- [10] Sherbrooke E. C., Patrikalakis N.M. and Brisson E. An algorithm for the medial axis transform of 3-D polyhedral Solids, IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics, 2, pp 44-61, 1996.
- [11] Yap Ch. K., An $O(n \log n)$ Algorithm for the Voronoi diagram of a Set of Simple Curve Segments, Discrete and Computational Geometry. 2:365 - 393, 1987.