

Una herramienta de apoyo en la enseñanza de Geometría Computacional

María Teresa Taranilla

Departamento de Informática, Universidad Nacional de San Luis, Argentina
tarani@unsl.edu.ar

Edilma Olinda Gagliardi

Departamento de Informática, Universidad Nacional de San Luis, Argentina
oli@unsl.edu.ar

Gregorio Hernández Peñalver

Facultad de Informática, Departamento de Matemática Aplicada,
Universidad Politécnica de Madrid, España
gregorio@fi.upm.es

Resumen

La Geometría Computacional es una disciplina que brinda un marco teórico y formal para dar soluciones a problemas de tipo geométrico. En este sentido, las operaciones entre polígonos brindan soluciones a una gama de aplicaciones del mundo real. Una de estas operaciones de gran utilidad es la denominada Sumas de Minkowski.

Esta operación está definida del siguiente modo: Dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathbf{R}^2$, la suma de Minkowski de P y Q , denotada por $P \oplus Q$ se define como $P \oplus Q = \{ p + q : p \in P, q \in Q \}$.

Respecto de la enseñanza de tópicos generales de Geometría Computacional vinculados a las Sumas de Minkowski, se busca cubrir un núcleo básico en los aspectos teóricos y prácticos lo suficientemente amplio de forma tal que el alumno reciba una visión comprensiva de los temas. En este trabajo se presenta una herramienta de apoyo educativo para el cálculo y la visualización de sumas de Minkowski entre polígonos. Mostramos sus características, destacando sus principales componentes y utilidades.

Palabras claves: Geometría Computacional, Sumas de Minkowski. Operaciones entre Polígonos.

Abstract

Computational Geometry is a discipline which offers a formal and theoretical framework to provide solutions to geometric problems. In this sense, the operation between polygons gives solutions to a wide range of real world applications. One of these operations is known as Minkowski Sum. This operation is defined in the following way: Let P and Q be two sets in \mathbf{R}^2 , the Minkowski sum of P and Q , denoted by $P \oplus Q$ is the set $\{ p + q : p \in P, q \in Q \}$.

When teaching Computational Geometry related to Minkowski sum, basic knowledge concerning the practical and theoretical aspects are required in order for student to receive a comprehensive view of these topics. In this paper we describe an educational software tool capable of calculating and displaying graphically the Minkowski sum between polygons. We show the tool emphasizing its main components and utilities.

Keywords: Computational Geometry, Minkowski Sum, Operations between Polygons.

1. Introducción

Muchas disciplinas requieren construir y manejar eficientemente objetos geométricos. Entre ellas se pueden destacar: robótica, visión artificial, computación gráfica, sistemas de información geográfica, diseño asistido por computadora, etc. En este sentido, la Geometría Computacional es una disciplina que estudia los problemas desde un punto de vista geométrico, dedicándose al diseño y análisis de algoritmos y estructuras de datos adecuadas para su resolución. Una tarea fundamental de la Geometría Computacional es la identificación de conceptos, propiedades y técnicas que ayuden al desarrollo de algoritmos eficientes. La disciplina tiene su origen en el campo de las aplicaciones, donde disponer de un algoritmo eficiente es, a veces, esencial para poder resolver en tiempo real los problemas planteados. Algunas clases particulares de problemas incluyen la búsqueda y recuperación de objetos geométricos, descomposición geométrica, la aproximación de formas y temas relacionados a proximidad, intersección y visibilidad entre objetos geométricos [1, 3, 11, 12].

Uno de los objetos geométricos con los que frecuentemente se trabaja son los polígonos, ya que constituyen una representación adecuada para la mayoría de los objetos del mundo real y, además, las operaciones que pueden realizarse entre ellos brindan adecuadas soluciones en una variada gama de aplicaciones.

Una de las operaciones que se pueden realizar entre polígonos, es la denominada Suma de Minkowski. Para definir las Sumas de Minkowski, decimos que dados dos conjuntos P y $Q \subset \mathbf{R}^2$, la suma de Minkowski de P y Q , denotada por $P \oplus Q$, es $P \oplus Q = \{p + q: p \in P, q \in Q\}$, donde $p + q$ es un vector que representa la suma de los vectores p y q . Es decir que dados los puntos $p = (px, py)$ y $q = (qx, qy)$, tenemos que $p + q = (px + qx, py + qy)$. Esta operación resulta de gran utilidad en aplicaciones tales como planificación de movimientos de robots, procesamiento de imágenes, sistemas de información geográfica, marcado y corte de moldes, entre otras [2, 5, 7, 8, 9].

Nuestro propósito fue el desarrollo de una herramienta de aplicación que sea utilizada como herramienta de trabajo, de simulación y especialmente de apoyo en la enseñanza de la Geometría Computacional. Dicha herramienta implementa la Suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos, tanto entre polígonos convexos y no convexos. En la enseñanza de tópicos generales de Geometría Computacional vinculados a las Sumas de Minkowski, se cubre un núcleo básico de conceptos teóricos y prácticos, de forma tal que el alumno recibe una visión amplia y comprensiva de los temas.

Con respecto a las herramientas con fines educativos relacionadas a la Geometría Computacional, hay bastante trabajo realizado. Aunque, en el caso particular de las Sumas de Minkowski, no existen herramientas con las características de la que hemos implementado. Esta herramienta forma parte de una colección de trabajos que desde 1988 se vienen realizando en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Madrid. Como resultado de estos trabajos se han obtenido una colección de aplicaciones que implementan algoritmos sobre distintos problemas dentro del campo de la Geometría Computacional, tales como cierres convexos y sus aplicaciones, problemas de vigilancia e iluminación, diagramas de Voronoi, entre otros.

Este tipo de aplicaciones son ampliamente usadas como apoyo en la enseñanza de la disciplina. La utilización de medios audiovisuales y de software adecuados tiende a facilitar el proceso de enseñanza. Además, cuando los algoritmos geométricos son mostrados con detalle y debidamente discutidos, se favorece el aprendizaje del alumno.

2. La Herramienta

En los últimos años, Internet y el servicio de Word Wide Web (WWW) se han convertido en un importante medio de comunicación e información y han contribuido a introducir nuevas posibilidades en el área de la educación.

En el ámbito de la Geometría Computacional es posible encontrar muchas herramientas que tienen como objetivo auxiliar y motivar a los alumnos en el proceso de aprendizaje como así también ser usadas como complemento en clases presenciales ayudando a los docentes a impartir conceptos que tradicionalmente eran enseñados en forma teórica y con el uso de elementos didácticos más rudimentarios (pizarrón, filminas etc.).

La presencia de este tipo de herramientas disponibles en Internet, beneficia a la enseñanza de la Geometría Computacional puesto que pueden utilizarse haciendo un real aprovechamiento de los recursos de hardware y software disponibles. Otra ventaja a considerar es la independencia del alumno en su formación respecto de la utilización de plataformas de hardware o software específicas.

Con esto destacamos la importancia de considerar la portabilidad de este tipo de software, tal como se ha considerado en este caso, ya que la herramienta implementada es un *applet* de Java, por lo que no es necesario ningún hardware particular ni tampoco realizar ningún tipo de instalación. Tan sólo es imprescindible tener un navegador instalado y configurado para ejecutar código Java contando con el ambiente de ejecución Java JRE versión 1.4 o superior. Dicha versión puede ser descargada gratuitamente desde el sitio de Sun Microsystems en la siguiente dirección <http://java.sun.com/j2se/1.4/download.html>.

La herramienta desarrollada es interactiva y visual, fácil de entender, usar y permite mostrar en detalle el funcionamiento de los algoritmos usados para el cálculo de la suma de Minkowski, de modo que tanto el problema propuesto como la solución obtenida puedan apreciarse claramente.

La interacción del usuario con la herramienta es sencilla y rápida. Todas las operaciones, tales como inserción de polígonos, elección del tipo de algoritmo a aplicar para el cálculo de la suma, manejo de las operaciones que se realizan durante la ejecución con demora etc. se pueden realizar fácilmente con el mouse.

La herramienta está enmarcada en un conjunto de páginas web. A continuación se describe brevemente el contenido de cada una de las páginas que componen el entorno de la herramienta:

- *Inicio*: Esta página contiene la presentación, título, autores.
- *Aspectos teóricos*: Contiene información teórica en la que se basa la herramienta.
- *Herramienta*: Muestra el programa que implementa la suma de Minkowski entre polígonos.
- *Ayuda*: Explica el funcionamiento de la herramienta (indica sus componentes y cómo utilizarlos). Se abre en una nueva ventana para poder consultarla mientras se utiliza la herramienta.
- *Enlaces de interés*: Desde aquí es posible acceder a enlaces de interés relacionadas con la Geometría Computacional y a las referencias bibliográficas.

2.1 Descripción de la Herramienta

En el ambiente de la herramienta se distinguen claramente tres zonas: una zona media o zona gráfica, una zona inferior y una zona superior, como se puede apreciar en la figura 1.

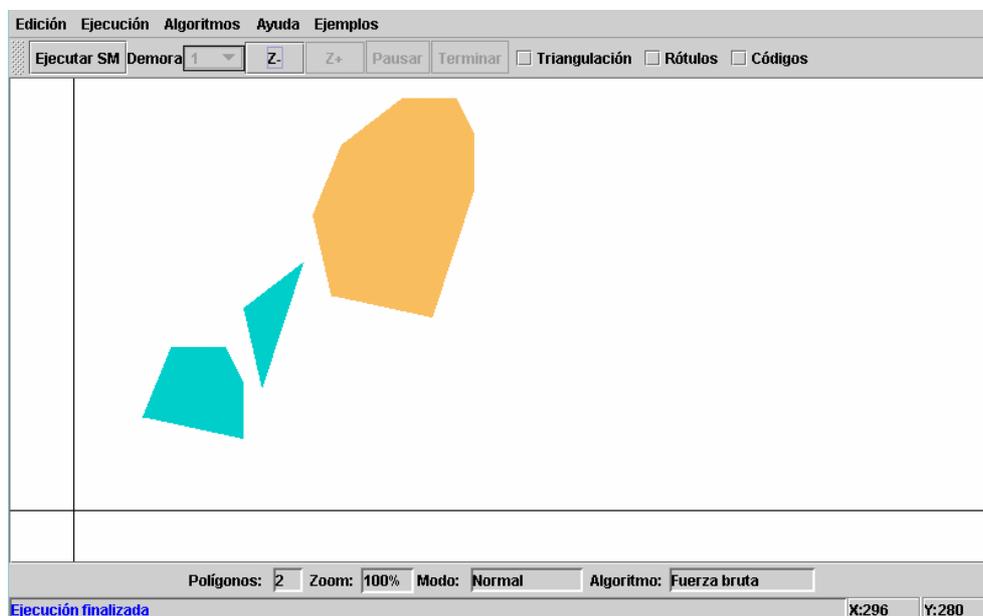


Figura 1: Pantalla del Ambiente

La zona media o zona gráfica es el área donde se dibujan los polígonos y se muestran los resultados de la suma de Minkowski. Puede elegirse el color de fondo de esta zona; las opciones son fondo blanco o fondo negro.

La zona inferior contiene una barra de estado y de información, mostrando en ellas datos tales como la ubicación del cursor del mouse sobre el plano xy, el algoritmo utilizado, información de zoom y, además contiene una Barra de Mensajes donde se muestra información referida al contenido de la zona gráfica y de la ejecución en sí.

En la zona superior del ambiente se encuentran la barra de menús desplegables y la barra de herramientas, las cuales describimos a continuación.

Barra de menús

La barra de menús contiene las siguientes opciones con submenús desplegables.

Menú Edición

Desde este menú se manejan todas las funciones referentes a la Edición, como se muestra en la figura 2. .

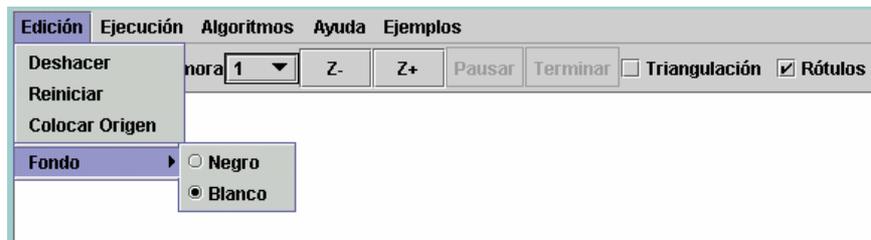


Figura 2: Menú edición

- *Deshacer*: esta opción permite eliminar el último polígono ingresado.
- *Reiniciar*: esta opción borra todo el contenido de la zona gráfica preparando la herramienta para iniciar la resolución de un nuevo problema.
- *Colocar origen*: esta opción permite ubicar el origen de las coordenadas en cualquier posición de la zona gráfica.
- *Fondo*: esta opción permite cambiar el color de fondo de la zona gráfica, pudiendo elegir entre los dos colores disponibles, blanco o negro.

Menú Ejecutar

Desde este menú, se ejecuta el cálculo de la Suma de Minkowski y se selecciona el modo de ejecución con el que se calculará la misma. Se permite al usuario elegir entre dos modos de ejecución, continuo o con demora, como se aprecia en la figura 3.

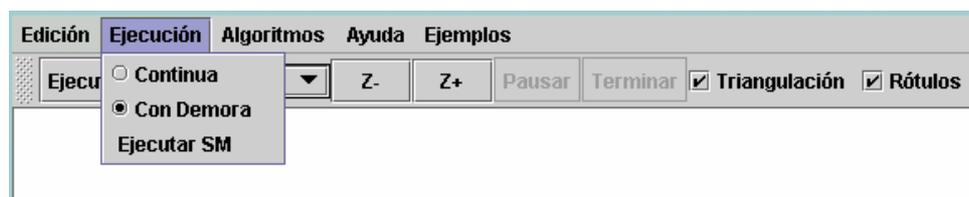


Figura 3: Menú Ejecución

Menú Algoritmo

Desde este menú es posible elegir el algoritmo que se usará para el cálculo de la suma de Minkowski. En esta herramienta se han implementado dos algoritmos: el algoritmo de Fuerza Bruta y el algoritmo Mejorado. La figura 4 muestra este menú.

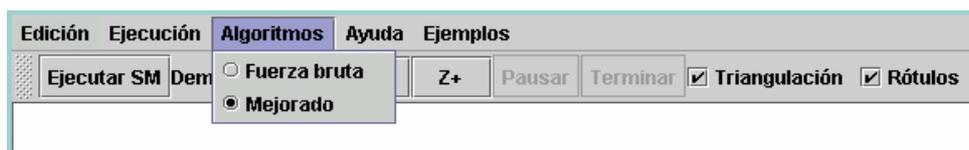


Figura 4: Menú Algoritmos

Menú Ayuda

Desde este menú se accede a la ayuda disponible y a la información acerca de los autores, como se observa en la figura 5.

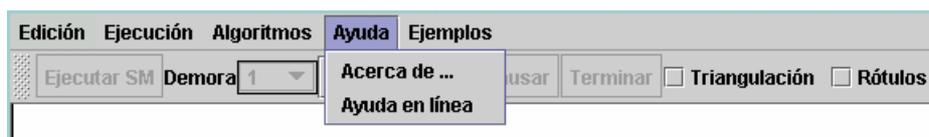


Figura 5: Menú Ayuda

Menú Ejemplos

Desde este menú es posible elegir diferentes ejemplos de problemas que calculan la suma de Minkowski entre distintos tipos de polígonos.

Barra de Herramientas

La Barra de Herramientas ubicada en la zona superior del ambiente contiene:

▪ Botones de acciones

- *Botón de ejecución:* este botón denominado Ejecutar SM permite iniciar la ejecución del cálculo de la suma de Minkowski.
- *Botones de zoom:* Los botones Z+ y Z- se utilizan para “acercar” o para “alejar” la vista del contenido de la zona gráfica y ver un porcentaje mayor del contenido a tamaño reducido.
- *Botón Pausar/Continuar:* si la opción elegida para la ejecución es con demora, este botón permite manejar la ejecución haciendo pausas cuando el usuario así lo desee y luego continuar la ejecución.
- *Botón Terminar:* este botón permite finalizar una ejecución con demora desde cualquier punto en que ésta se encuentre, obviando la demora.

▪ Opciones

- *Demora:* permite elegir el tiempo de demora (en segundos) entre cada paso para el modo de ejecución con demora.
- *Triangulación:* permite activar y desactivar la opción de mostrar la triangulación realizada en los polígonos no convexos.
- *Rótulos:* permite activar y desactivar la opción de mostrar las coordenadas de los vértices de los polígonos ingresados en la zona gráfica.
- *Códigos:* permite activar y desactivar las opción de mostrar en una ventana auxiliar el código del algoritmo que se esta ejecutando, cuando el tipo de ejecución elegida es con demora.

2.2 Funcionalidad de la Herramienta

La herramienta permite fácilmente dibujar polígonos simples tanto convexos como no convexos y calcular la suma de Minkowski entre ellos. A medida que se ingresan los polígonos se realizan controles para que no sea posible el ingreso de polígonos que no sean simples. Además en el caso que el polígono ingresado sea no convexo, inmediatamente después de que se termina de dibujar, es triangulado, mostrándose la triangulación obtenida en pantalla si el usuario así lo desea. En la figura 6, se observan dos polígonos no convexos y su correspondiente triangulación.

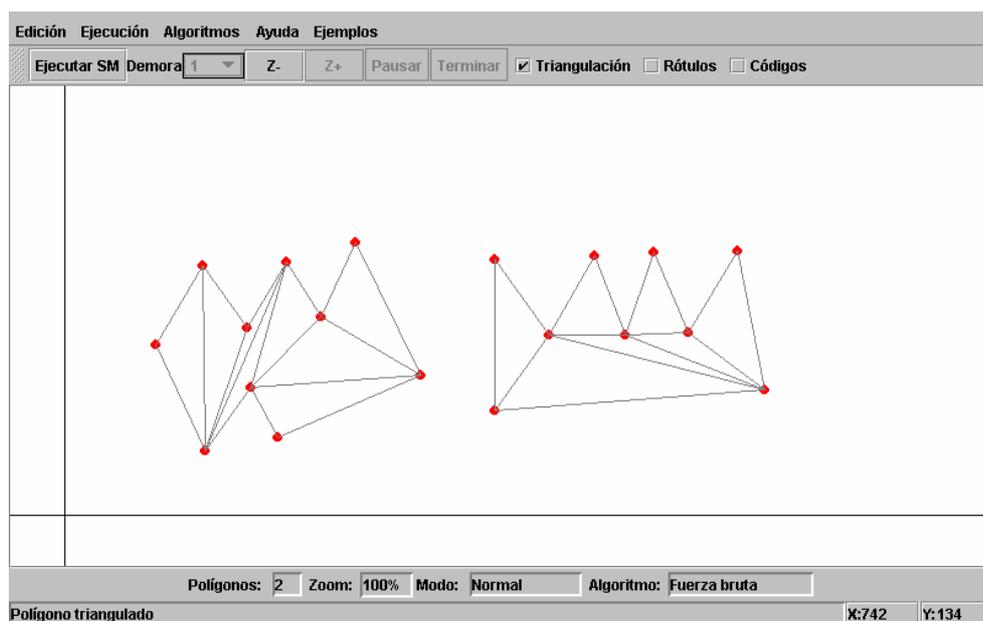


Figura 6: Polígonos no convexos triangulados

Se permite dibujar polígonos en cualquier cuadrante del plano xy , creando los ejes de coordenadas y permitiendo al usuario ubicarlos y moverlos a cualquier punto de la herramienta.

Para calcular la suma de Minkowski deben ingresarse dos polígonos. En el caso de ingresar más de dos polígonos, el resultado será la suma de Minkowski de cada uno de los polígonos con el primer polígono ingresado.

Una vez ingresados dos o más polígonos, la herramienta permite realizar la suma de Minkowski, teniendo como opciones dos tipos de ejecución: **ejecución continua** o **ejecución con demora**. El modo de ejecución puede elegirse en el menú ejecución de la barra de menús.

La ejecución continua muestra directamente la solución final al problema planteado, en cambio la ejecución con demora permite observar los pasos de la resolución del problema con la demora elegida por el usuario. La demora se determina desde la lista desplegable a la derecha del rótulo *Demora* ubicado en la barra de herramientas. La demora por defecto es de un segundo. Es posible cambiar el tiempo de la demora durante la ejecución, eligiendo de dicha lista otro intervalo de tiempo de demora.

Cuando la opción de ejecución elegida es con demora es posible detener la ejecución en cualquiera de los pasos que se encuentre y luego continuar con la ejecución desde el punto en que se detuvo. También, es posible finalizar la ejecución con demora, desde cualquier punto en que ésta se encuentre, obviando la demora.

Una opción interesante que puede elegir el usuario en una ejecución con demora es ver el pseudocódigo del algoritmo en ejecución y seguir junto con la ejecución visual las líneas de código que se está ejecutando en ese momento, permitiendo de esta manera un entendimiento más profundo aún de los algoritmos que se utilizan.

Otra característica de la herramienta es que, como el resultado de la suma de Minkowski entre dos polígonos puede estar fuera del alcance visual de la herramienta, se provee la opción de alejar y/o acercar la visión del plano. Esta operación denominada *zoom* está disponible en la barra de herramientas.

Es válido aclarar que durante la ejecución con demora es posible cambiar el tiempo de demora, cambiar el porcentaje de *zoom*, mover los ejes de coordenadas y otras opciones sin ningún inconveniente.

2.3 Aspectos de la implementación

Para el desarrollo de la herramienta implementada elegimos el lenguaje **Java**. La elección del lenguaje de programación quedó determinada, en gran parte, por el objetivo de la herramienta, por el uso que se pretende hacer de ella y para aprovechar las ventajas que ofrece en la actualidad el acceso generalizado a Internet. Es decir, el código del programa puede estar localizado en un servidor pero puede utilizarse desde cualquier lugar, sin necesidad de más ayuda que la del navegador Web que se utilice habitualmente y en forma independiente de la plataforma que el usuario esté utilizando.

Uno de los objetivos es que nuestra herramienta se ejecute en forma independiente de la plataforma y sin que sea necesaria una instalación previa. Para ello, en lugar de implementar una aplicación standard Java decidimos implementar lo que se denomina applet en Java.

Una aplicación es un programa escrito en Java al que no le falta nada, es independiente y puede ejecutarse emitiendo una orden desde la interfaz de usuario del sistema operativo subyacente. Para ejecutar una aplicación Java es necesario tener instalado en el sistema una máquina virtual Java y haber instalado previamente la aplicación.

Para poder ejecutar un applet es necesario sólo poseer un navegador Web con capacidades Java. Un applet debe ejecutarse dentro de un navegador Web y no puede ser ejecutado en forma independiente. Cuando un navegador Web carga una página Web que contiene un applet, el navegador descarga el código del applet desde el servidor Web y lo ejecuta en el sistema local. Las ventajas principales del applet son que no necesita instalación en el sistema local y que la interfaz de usuario está dada por el navegador web.

Antes de iniciar el cálculo de la suma de Minkowski, es posible elegir el algoritmo que se desea usar en la resolución del problema. Para esta herramienta se implementaron dos algoritmos que calculan la suma de Minkowski de polígonos convexos, el algoritmo que denominamos de *algoritmo de fuerza bruta*, que tiene una complejidad de ejecución de orden cuadrático y el algoritmo que llamamos *algoritmo mejorado*, con una complejidad de ejecución de orden lineal.

La idea de implementar los dos algoritmos es que se puedan comparar la ejecución de los mismos; esto se hace así principalmente por los fines educativos que persigue la herramienta. De esta forma, es posible apreciar los distintos costos de ejecución que tienen los algoritmos, y observar con detenimiento cómo por diversas estrategias, se arriba a la solución de un problema.

Para llevar a cabo la implementación de los algoritmos que calculan la Suma de Minkowski fue necesaria la implementación de otros algoritmos propios de la Geometría Computacional. En el algoritmo de fuerza bruta para el cálculo de la suma de Minkowski usamos el conocido Scan de Graham, que permite calcular el cierre convexo de una nube de puntos con $O(n \log n)$ [4]. En el algoritmo mejorado, usamos una variación especial del método de rotación de calibres para calcular los puntos extremos de los polígonos [10]. Otro algoritmo auxiliar que utilizamos es la triangulación de polígonos, aplicado a los polígonos no convexos. En este caso implementamos el algoritmo de Kong, que es una variación del algoritmo de “corte de orejas” [6].

3. Conclusiones

En este trabajo se describió una herramienta didáctica para ser utilizada como apoyo en la enseñanza de la Geometría Computacional, permitiendo mostrar el funcionamiento de los algoritmos usados para el cálculo de la suma de Minkowski entre polígonos.

La utilización de software adecuado facilita el proceso de enseñanza y favorece al alumno en el proceso de aprendizaje. Consideramos que este tipo de herramientas ofrecen facilidades en la enseñanza de la Geometría Computacional, puesto que las prácticas de laboratorios constituyen un complemento importante para afianzar conceptos teóricos que sirven de marco apropiado en diferentes aplicaciones que se pueden modelar como problemas de tipo geométrico. Las implementaciones que permiten mostrar con detalle la ejecución de distintos algoritmos que realizan la misma tarea, en forma pausada, continua o con demora, son útiles para mejorar el entendimiento de diversos algoritmos de cualquier temática.

La herramienta está disponible en la siguiente dirección:

<http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/aplicaciones.html>

Cabe destacar que, esta herramienta puede ser ampliada para realizar otro tipo de operaciones algebraicas entre diferentes tipos de polígonos, así como también se puede pensar en el desarrollo de otras herramientas que implementen sumas de Minkowski entre conjuntos de polígonos y sumas de Minkowski en tres dimensiones.

Referencias

- [1] Abellanas Oar, M. *Descubriendo la Geometría Algorítmica*, 2000.
<http://www.dma.fi.upm.es/mabellanas/divulgación/GeometriaAlgoritmica.html>
- [2] Agarwal, P.K.; Flato, E.; Halperin, D., *Polygon Decomposition for efficient construction of Minkowski sums*, Computational Geometry: Theory and applications N° 21, (39-61), 2001.
- [3] de Berg, Kreveld, Overmars, Schwarzkopf. *Computational Geometry: algorithms and applications*, Springer Verlag, BH 1997
- [4] Graham, R.L. *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, Information Process Letters, 1:132-133, 1972
- [5] Heywood I., Cornelius S., Carver S., *Geographical Information Systems*, Addison-Wesley Longman, New York, 1998.
- [6] Kong, X.; Everett, H.; Toussaint, G. T., *The Graham scan triangulates simple polygons*, Pattern Recognition Letters, vol. 11, November 1990, pp. 713-716.
- [7] Latombe, J.C., *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Publisher, Boston, MA, 1991.
- [8] Li, Zhenyu *Compaction Algorithms for Non-Convex Polygons and their Applications*, tesis doctoral, Universidad de Harvard, 1994
- [9] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New York, 1982.
- [10] Toussaint, G.T. *Solving geometric problems with Rotating Calipers*, Proceedings of IEEE MELECON'83, Athens, Greece, May 1983, pp. A10.02/1-4.
- [11] Toussaint, G.T. *Computational Geometry*, Edited by North-Holland, Amsterdam, 1985 .
- [12] Toussaint, G.T. *What is computational geometry?* Proc. IEEE, vol. 80, No. 9., (1347-1363),1992.